Über den Einfluss der Anzahl der Raumdimensionen auf die Proportionalitätsfaktoren physikalischer Gesetze und Formeln

von
Peter Franzke in Berlin

Der Einfluss der Anzahl der Raumdimensionen

Gewöhnt man sich nach einiger Zeit an den Gebrauch von Gleichungen und Formeln der mathematischen Physik, erkennt man, dass der Natur eine Besonderheit innewohnt: Sie verzeiht uns, wenn wir bestimmte Einzelheiten außer Acht lassen. Ein Naturgesetz hat einige grundlegende Eigenschaften. Es stellt ein logisches Getriebe dar, das aus der Gegenwart Schlüsse auf die Zukunft erlaubt; man kann es mit Informationen über die Gegenwart füttern. Zudem enthält es Naturkonstanten sowie einige einfache Zahlen. Diese einfachen, dimensionslosen Zahlen, die Einstein „universelle Konstanten" oder „rationelle Zahlen" nannte, treten in fast allen physikalischen Formeln im Zusammenhang mit Naturkonstanten auf.

In einem Briefwechsel mit seiner Brieffreundin Ilse Rosenthal-Schneider weist Einstein darauf hin, dass in physikalischen Formeln dimensionslose Größen wie 2, die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e, die Basis des natürlichen Logarithmus, auftauchen. Darüber hinaus fand er es denkwürdig, dass sie zwar in physikalischen Gleichungen auftreten, aber weder besonders groß noch besonders klein sind: Sie unterscheiden sich bekanntlich nie allzu sehr von der Zahl 1. Vielleicht sind sie zehnmal größer oder kleiner, aber nie Millionen Male.

Wenn man beispielsweise den Umfang eines Kreises oder das Volumen einer Kugel mit dem Radius R berechnen will, erhält man $2\pi R$ bzw. $\frac{4}{3}\pi R^3$. Die Proportionalitätsfaktoren 2π bzw. $\frac{4}{3}\pi$ sind zwei dieser allgegenwärtigen „rationellen Zahlen", wie Einstein sie nannte.

Für Einstein war die Allgegenwart der *kleinen* dimensionslosen Zahlen in den Gleichungen der Physik etwas Unerklärliches. Er war überaus beeindruckt, ja sogar höchst ratlos angesichts dieses Geheimnisses:

„1. Rationelle Zahlen. Diese sind solche, welche bei der logischen Entwicklung der Mathematik als einzigartige individuelle Bildungen gewissermaßen notwendig auftreten.

$$\text{z. B.: } e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$

Ebenso ist es mit π, das ja mit e nahe verknüpft ist. Im Gegensatz zu solchen rationellen Zahlen steht der Rest der Zahlen, welche nicht durch eine durchsichtige Konstruktion aus 1 hervorgehen. Es dürfte in der Natur der Sache liegen, dass solche rationelle Zahlen sich der Größenordnung nach nicht von 1 unterscheiden, wenigstens solange man sich auf „einfache", bzw. natürliche Bildungen beschränkt. Dies ist aber nicht fundamental und nicht scharf fassbar."[1]

„Dies lässt sich zwar nicht streng fordern, denn warum sollte ein numerischer Faktor $(12\pi)^3$ nicht bei einer mathematisch-physikalischen Betrachtung auftreten können? Aber derartige Fälle gehören unstreitig zu den Seltenheiten."[2]

Was für Einstein etwas Unerklärliches war, stellt für die Physiker einen Glücksfall dar, weil sie unter diesen Voraussetzungen ein physikalisches Problem mit einer Dimensionsanalyse untersuchen können, um die Form des Gesetzes bei Vernachlässigung der Faktoren herauszufinden.
So ist, um ein Beispiel zu nennen, die Periodendauer T eines Fadenpendels bei kleinen Auslenkungen mit hoher Genauigkeit durch die einfache Formel

[1] Albert Einstein an Ilse Rosenthal-Schneider am 13. Oktober 1945, zitiert in: Rosenthal-Schneider, *Begegnungen*, S. 26.
[2] A. Einstein, „Elementare Betrachtungen über die thermische Molekularbewegung in festen Körpern", in: *Ann. Phys.* 35 (1911), S. 687.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gegeben, wenn l die Länge des Pendels und g die Erdbeschleunigung ist. 2π ist ein solcher Proportionalitätsfaktor, der aus jenen einfachen, dimensionslosen Zahlen zusammengesetzt ist, die in jeder Formel zur Beschreibung der materiellen Welt auftauchen. Da diese Faktoren fast immer von der Größenordnung 1 sind, können sie, solange man nicht an einem genauen Wert des Ergebnisses interessiert ist, vernachlässigt werden. Das ist ein großer Vorteil, wenn man ein Problem angehen will. Will man beispielsweise die Periodendauer des Fadenpendels bestimmen, so erhält man die Struktur des Gesetzes $T = f(l, g)$ durch bloße Analyse der Einheiten. Fordert man, dass sie auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen, gibt es nur eine Kombinationsmöglichkeit der Länge l und der Erdbeschleunigung g, die eine Zeit als Ergebnis liefert: Die Periodendauer muss proportional zur Quadratwurzel von l/g sein.

Man kann etwas Licht in das Dunkel dieses Rätsels bringen, wenn man berücksichtigt, dass fast alle numerischen Faktoren, von denen Einstein so beeindruckt war, ihren Ursprung in der Geometrie haben. So ist zum Beispiel das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge R gleich R^3, das Volumen einer Kugel mit dem Radius R aber $\frac{4}{3}\pi R^3$. Die numerischen Faktoren berücksichtigen, in welcher Weise die Form unserer Gebilde die fundamentalen Naturkräfte beeinflusst. Da diese isotrop wirken, also keine Raumrichtung bevorzugen, weisen sie in der Regel sphärische Symmetrie auf.

Wie man weiß, hat der Kreis, eine 2-dimensionale Kugel, mit Radius R die Umfangslänge $2\pi R$, der Oberflächeninhalt einer 3-dimensionalen Kugel beträgt $4\pi R^2$. Entsprechend ist der Flächeninhalt eines Kreises πR^2, die Volumenmaßzahl einer 3- dimensionalen Kugel $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Nun sollen n-dimensionale Kugeln betrachtet und deren Oberflächen und Volumina berechnet werden. Es ist klar, dass der Oberflächeninhalt O(n) einer n-dimensionalen Kugel proportional zu R^{n-1} ist, denn die Oberfläche ist eine (n-1)-dimensionale Punktmannigfaltigkeit, eingebettet im n-dimensionalen Raum. Das Volumen V(n) ist proportional zu R^n. Es ist aber überhaupt nicht ersichtlich, wie die Proportionalitätsfaktoren von der Anzahl n der Raumdimensionen abhängen. Unterscheiden sie sich auch nicht allzu sehr von der Zahl 1?

Volumen V_n und Oberflächeninhalt O_n einer n-dimensionalen Kugel mit dem Radius R

1. Volumen $V_n := V(n)$

(V_n): $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le R^2$;

$V_n = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le R^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$.

Transformiert man $x_i = R\xi_i$, so erhält man mit $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = R\delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ und der Funktionaldeterminante $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} = R^n$

$V_n = R^n \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le 1} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n$, wobei $e_n := \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le 1} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n$ das n-dimensionale Volumen der Einheitskugel (R=1) ist, so dass

(1) $V_n = R^n e_n$ gilt.

Nun ist $e_n = \int_{-1}^{1} d\xi_n \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \le 1-\xi_n^2} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-1}$. Das innere Integral ist gerade das Volumen der (n-1)-dimensionalen Kugel mit dem Radius $\sqrt{1-\xi_n^2}$ und daher mit (1) gleich $e_{n-1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$. Setzt man diesen Wert ein, so ergibt sich die Rekursionsformel

$e_n = e_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n = 2e_{n-1} \int_{0}^{1} (1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n$.

Substituiert man $\xi_n = \cos\varphi,\ d\xi_n = -\sin\varphi d\varphi$, so erhält man

mit $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}$

$$e_n = 2e_{n-1} \int_0^1 (1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n = -2e_{n-1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2\varphi)^{\frac{n-1}{2}} \sin\varphi d\varphi = 2e_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi d\varphi = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} e_{n-1}.$$

Eine kurze Rechnung führt zu $e_n = \frac{\sqrt{\pi}^k}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} e_{n-k}$ mit $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Für k = n-1 erhält man $e_n = \frac{\sqrt{\pi^{n-1}}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} e_1$. Mit $e_1 = 2$ und $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ folgt

(2) $e(n) = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

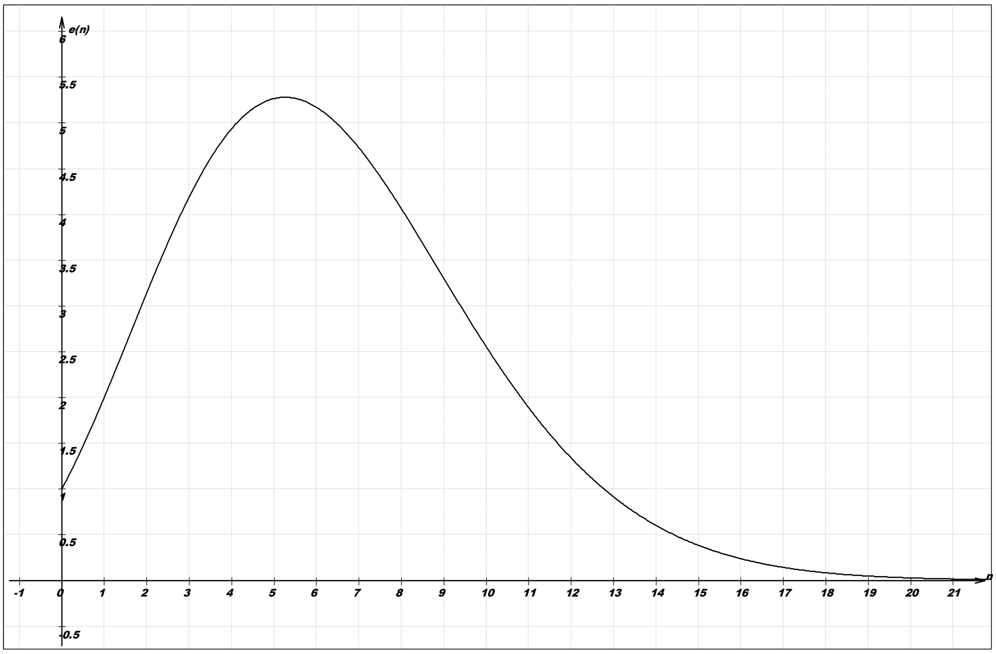

Abb. 1: Volumen e(n) einer n-dimensionalen Kugel mit Radius 1

Für das gesuchte Volumen V_n folgt somit

$$(3)\quad V(n) = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n .$$

Für gerades n = 2m erhält man mit $\Gamma(m+1) = m!$

$$V(2m) = \frac{\pi^m}{m!} R^{2m} .$$

Mit Hilfe der Formel $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ führt eine kurze Rechnung zu

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}+1\right) = \frac{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\cdots(2m+3-2k)}{2^k} \Gamma\left(\frac{2m+3-2k}{2}\right)$$

mit $k = 1, 2, \ldots\ldots, m+1$.

Mit $k = m+1 \quad und \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ erhält man die Volumenformel für ungerades $n = 2m+1$:

$$V(2m+1) = \frac{2 \cdot (2\pi)^m}{(2m+1)!!} R^{2m+1} .$$

Speziell finden wir natürlich für V_1, V_2 und V_3 die wohlbekannten Werte 2R, πR^2 und $\frac{4}{3}\pi R^3$.

2. Oberflächeninhalt On := O(n)

Die Funktionsgleichung für die „obere" Halbkugel lautet $x_n = f(x_1, x_2, \ldots.., x_{n-1}) = \sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}$

.

Mit $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{2x_i}{2x_n} = -\frac{x_i}{x_n}$ *erhält man*

$$O_n = 2\int \cdots_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \le R^2} \cdots \int \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} = 2\int \cdots_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \le R^2} \cdots \int \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{x_i}{x_n})^2}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} =$$

$$2\int \cdots_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \le R^2} \cdots \int \frac{1}{x_n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} = 2R\int \cdots_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \le R^2} \cdots \int \frac{1}{x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} =$$

$$2R\int \cdots_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \le R^2} \cdots \int \frac{1}{\sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

Transformiert man wie oben $x_i = R\xi_i$, so erhält man mit $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = R\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots.., n-1)$

und der Funktionaldeterminante $J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} \end{pmatrix} = R^{n-1}$

$$O_n = 2R^{n-1}\int \cdots_{\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \le 1} \cdots \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2}} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-1}.$$

$$O_n = 2R^{n-1}\int \cdots_{\sum_{i=1}^{n-2} \xi_i^2 \le 1} \cdots \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2}} d\xi_{n-1} \quad mit \quad \alpha = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i^2}.$$

Die Auswertung des inneren Integrals liefert

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2}} d\xi_{n-1} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i^2 - \xi_{n-1}^2}} d\xi_{n-1} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \xi_{n-1}^2}} d\xi_{n-1}.$$

Substituiert man $\xi_{n-1} = \alpha u \quad mit \quad d\xi_{n-1} = \alpha du$, so ist $I = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u)\,|_{-1}^{1} = \pi$.

Man erhält: $O_n = 2\pi R^{n-1}\int \cdots_{\sum_{i=1}^{n-2} \xi_i^2 \le 1} \cdots \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-2} = 2\pi R^{n-1} e_{n-2}$.

Ersetzt man mit Hilfe der Formel (2) e_{n-2}, so erhält man $O_n = 2\pi R^{n-1} \dfrac{\sqrt{\pi^{n-2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)}$, so dass

schließlich

$$(4)\quad O(n) = 2\frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^{n-1}.$$

Für die Kugel mit dem Radius R = 1 ergibt sich dann $o(n) = 2\dfrac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

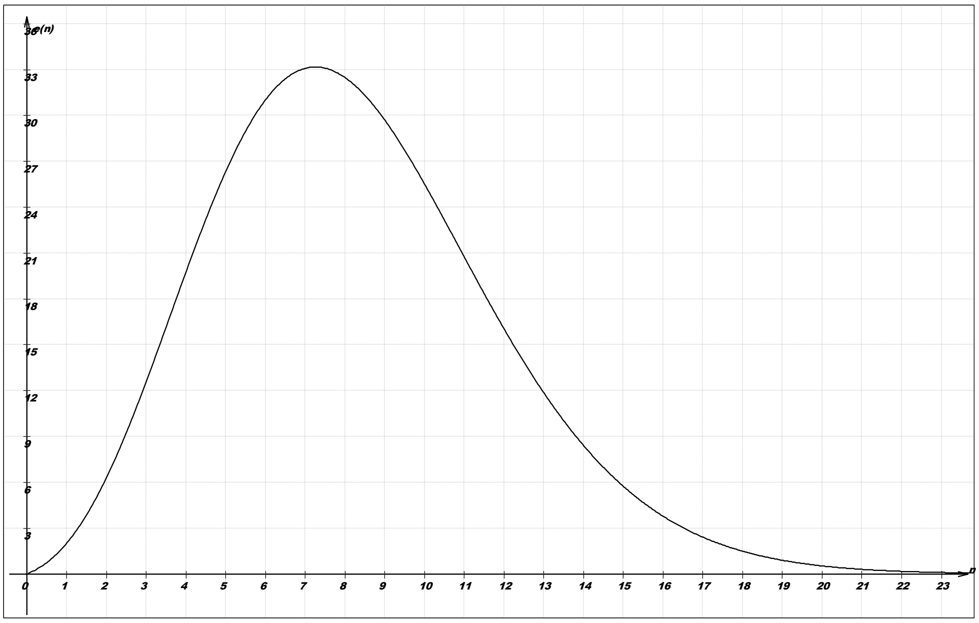

Abb. 2: Oberflächeninhalt o(n) einer n-dimensionalen Kugel mit dem Radius 1

Für gerades n = 2m erhält man mit $\Gamma(m+1) = m!$

$$O(2m) = \frac{2\pi^m}{(m-1)!} R^{2m-1} = \frac{dV(2m)}{dR}.$$

Für ungerades n = 2m+1 erhält man mit $\Gamma(m+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi} = \dfrac{(2m)!}{m!2^{2m}}\sqrt{\pi}$

$$O(2m+1) = \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!} R^{2m} = \frac{2^{2m+1} m!\pi^m}{(2m)!} R^{2m} = \frac{dV(2m+1)}{dR}.$$

Für n = 2 und n = 3 erhält man selbstverständlich $O_2 = 2\pi R \quad und \quad O_3 = 4\pi R^2$.

Dimension n	Zahlenwert von V(n; R=1)	Zahlenwert von O(n; R=1)
1	2	2
2	3,141…	6,283…
3	4,188…	12,566…
4	4,934…	19,733…
5	5,263…	26,3189…
6	5,167…	31,006…
7	4,724…	33,073…
8	4,058…	32,469…
10	2,550…	25,5016…
20	0,0258..	0,5163…
50	$\approx$ 1,730 $\cdot 10^{-13}$	$\approx$ 8,651 $\cdot 10^{-12}$
100	$\approx$ 2,368 $\cdot 10^{-40}$	$\approx$ 2,368 $\cdot 10^{-38}$

Fazit der Rechnungen:
Bemerkenswert ist, dass mit der Anzahl der Dimensionen auch die Proportionalitätsfaktoren Werte erreichen, die von 1 erheblich abweichen. Sie wachsen bei steigendem n zunächst an und erreichen ein flaches Maximum; bei der Folge der Volumina für die fünfte Dimension $n=5$ $[e(5)=\frac{8}{15}\pi^2]$, bei der Folge der Oberflächen für die siebente Dimension $n=7$ $[o(7)=\frac{16}{15}\pi^3]$), um dann für größeres n rasch gegen Null zu gehen.

Je höher die Dimension wird, desto mehr krümmen sich die Hypersphären in sich selbst zusammen, so dass ihr Volumen und ihre Oberfläche schließlich verschwindend klein werden. Die Folge der $V(2m)$ bildet nämlich eine monotone Nullfolge, da $V(2m)$ das m-te Glied der stets konvergenten Potenzreihe von exp(x) an der Stelle $x=\pi R^2$ ist. Ersetzt man in $V(2m+1)$ den Nenner (2m+1)!! durch das kleinere Produkt (2m)!!, so erhält man

$$V(2m+1)=\frac{2\cdot(2\pi)^m}{(2m+1)!!}R^{2m+1}<2R\frac{2^m(\pi R^2)^m}{(2m)!!}=2R\frac{(\pi R^2)^m}{m!}=2RV(m)\ ,$$

so das auch die Folge V(2m+1) mit wachsendem m eine monotone Nullfolge bildet.
Analog zeigt man, dass auch die Folgen $O(2m)=\frac{2\pi^m}{(m-1)!}R^{2m-1}=2\pi R\frac{(\pi R^2)^{m-1}}{(m-1)!}$ und O(2m+1) monotone Nullfolgen sind.

Dass dieser Sachverhalt nicht allgemeingültig ist in n-dimensionalen Räumen, zeigt die „Welt" der Hyperkuben. Für $n=1$ ist der „Würfel" eine Linie mit dem „Inhalt" a. Für $n=2$ erhält man als Kubus ein Quadrat mit dem Volumen a^2 und der „Oberfläche" 4a und für $n=3$ schließlich einen Würfel im engeren Sinne mit dem Volumen a^3 und der Oberfläche $6a^2$. Allgemein gilt für das Volumen des n-dimensionalen Kubus $V(n)=a^n$ und für dessen Oberfläche $O(n)=2na^{n-1}$. Setzt man $a=1$, so bleibt, im Gegensatz zur n-dimensionalen Hypersphäre, das Volumen des n-dimensionalen Einheitswürfels stets 1, während dessen Oberfläche wie die Folge 2n nach Unendlich strebt und nicht, wie bei der Hypersphäre, gegen null. Für die Länge der Diagonalen des Hyperkubus erhält man nach dem Lehrsatz des Pythagoras $d = a\sqrt{n}$. Das ist bemerkenswert: Das Volumen des n-dimensionalen Einheitswürfels bleibt stets 1, aber seine Diagonale wird wie $\sqrt{n}$ größer, während das Volumen der n-dimensionalen Einheitssphäre mit hinreichend großem n immer kleiner wird, wobei ihr Durchmesser stets 2 bleibt.

In einem 116964-dimensionalen Hyperwürfel der Kantenlänge $a = 1[m]$, dem Volumen $V = 1[m^{116964}]$ und der Oberfläche $O = 233928[m^{116963}]$ lässt sich demnach ein Stab der Länge $d = 342[m]$ (gleich der Höhe des Eiffelturmes) unterbringen, während in einer Hypersphäre mit dem Durchmesser der Erde ($\approx$12742 km) bei hinlänglich großem n gerade einmal ein „Liter“ Wasser hineingehen würde.

Die Ergebnisse lassen folgende Schlussfolgerung zu: Die weite Verbreitung *kleiner* numerischer Faktoren in den Naturgesetzen und physikalischen Formeln folgt aus der Tatsache, dass die Welt, in der wir leben, nur wenige Raumdimensionen hat. Würden wir in einer Welt mit sehr viel mehr Dimensionen leben, wären physikalische Formeln, in denen wir die Proportionalitätskonstanten vernachlässigen, oft höchst ungenau.