Die Kugel

von
Peter Franzke in Berlin

1. Die Kugel

„Geometrie: gekrümmte geschlossene Fläche, deren Punkte von einem festen Punkt M (Kugelmittelpunkt) einen festen Abstand r (Kugelradius) haben. Gewöhnlich wird als Kugel auch der von dieser Fläche umschlossene Körper (Kugelkörper) bezeichnet, der aus allen Punkten P mit MP ≤ r besteht. – Jede Schnittfigur einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis; geht die Ebene durch den Mittelpunkt, schneidet sie die Kugel in einem Großkreis. Dabei entstehen auf beiden Seiten der Ebene Kugelabschnitte (Kugelsegmente). Den zur Kugeloberfläche gehörenden Teil eines Kugelabschnitts bezeichnet man als Kugelhaube (Kugelkappe, Kalotte). Ergänzt man einen Kugelabschnitt über seinem Grundkreis durch einen Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, so entsteht ein Kugelausschnitt (Kugelsektor). Wird eine Kugel von zwei parallelen Ebenen geschnitten, so entsteht zwischen diesen eine Kugelschicht; ihr zur Kugeloberfläche gehörender Teil bildet eine Kugelzone. Der Rauminhalt einer Kugel ist V = 4/3 πr3 (Kugelvolumen), der Flächeninhalt der Kugeloberfläche A = 4πr2.“ [Meyers Lexikon]

1.1. Die Einheitssphäre[1] $\mathcal{S}^2$

Die Einheitssphäre $\mathcal{S}^2$ ist der geometrische Ort aller Punkte P des dreidimensionalen euklidischen Punktraumes $\mathcal{E}^3$, die von einem festen Punkt, dem Mittelpunkt O, einen festen Abstand r = 1 haben. Da die geometrischen Eigenschaften einer Figur von Punkten im $\mathcal{E}^3$ gegenüber Translationen des Koordinatensystems invariant sind (Translationssymmetrie), kann man o. B. d. A. den Ursprung des kartesischen Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel legen, so dass die Sphäre d. die Punktmenge $\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ dargestellt werden kann. Beschreibt man stattdessen nach Gauß die Punkte der Sphäre mit Hilfe der sphärischen Koordinaten λ und ϕ vektoriell, erhält man mit den Kugelkoordinaten

$$x = \cos(\lambda)\cos(\phi), \quad y = \sin(\lambda)\cos(\phi), \quad z = \sin(\phi)$$

die Gleichung

$$\mathcal{S}^2 = \{P \in \mathcal{E}^3 \mid \overrightarrow{OP}(\lambda, \varphi) = (\cos(\lambda)\cos(\phi), \sin(\lambda)\cos(\phi), \sin(\phi))^T;\ 0 \le \lambda \le 2\pi;\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

λ heißt die geographische Länge, ϕ die geographische Breite und der Winkel ψ = $\frac{\pi}{2} - \varphi$ die Poldistanz des Punktes P.

Die Parameterkurven λ = const. (ϕ variabel) und ϕ = const. (λ variabel) sind die Meridian[2]- bzw. die Breitenkreise. Für λ = 0 erhält man den Nullmeridian, für ϕ = 0 den Äquator, für $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ den Nordpol N^+ bzw. den Südpol N^-.

[1] σφαίρα (griech.) = Kugel
[2] meridies (lat.) = Mittag

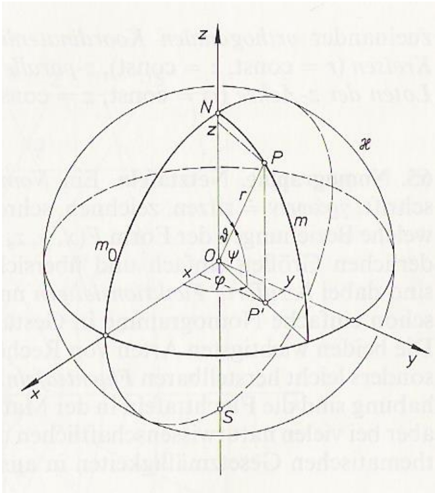

Abb. 1: Kugel

Differenziert man den Vektor $\overrightarrow{OP}(\lambda,\varphi)$ partiell nach λ bzw. ϕ, so berechnet man die Tangentenvektoren der Parameterlinien:

$$\overrightarrow{OP}_\lambda := \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \lambda} = (-\sin(\lambda)\cos(\varphi), \cos(\lambda)\cos(\varphi), 0)^T \text{ bzw.}$$

$$\overrightarrow{OP}_\varphi := \frac{\partial \overrightarrow{0P}}{\partial \varphi} = (-\cos(\lambda)\sin(\varphi), -\sin(\lambda)\sin(\varphi), \cos(\varphi))^T .$$

Bildet man das Vektorprodukt bzw. das Skalarprodukt der beiden Tangentenvektoren, so erhält man $\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \overrightarrow{0P}}{\partial \varphi} = \cos(\varphi)\cdot\overrightarrow{0P} := \vec{n}$ bzw. $\langle \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \overrightarrow{0P}}{\partial \varphi} \rangle = 0$. Für $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$ sind demnach die beiden Tangentenvektoren an den beiden Parameterlinien im Punkte P linear unabhängig und orthogonal, spannen also die Tangentialebene τ im Punkt P der Kugel auf.

Der für $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$ nicht verschwindende Vektor $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor in Richtung $\overrightarrow{0P}$, der auf der Tangentialebene τ senkrecht steht. Die Pole N^+ und N^- $(\lambda\, beliebig, \varphi = \pm\frac{\pi}{2})$ heißen singuläre Punkte.

Schränkt man den Definitionsbereich der Parameter in der Parameterebene auf das halboffene Rechteck $H = \{(\lambda,\varphi) \mid 0 \le \lambda < 2\pi; -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ ein, so ist die Abbildung $f: H \to \mathcal{S}^2\{N^+, N^-\}$ bijektiv und das Netz der Parameterlinien regulär, d. h. jeder Punkt der punktierten Sphäre wird von beiden Scharen von Parameterlinien schlicht überdeckt, d. h. durch jeden Punkt $P \in \mathcal{S}^2$-$\{N^+, N^-\}$ läuft genau eine λ-Linie und genau eine ϕ-Linie derart, dass die Parameterlinien ein Parameternetz, in diesem Fall sogar ein orthogonales, bilden, dessen viereckige, krummlinige Maschen keine verschwindenden oder gestreckten Winkel aufweisen, dessen Seiten sich also nicht berühren, sondern sich in jedem Flächenpunkt P(λ,ϕ) unter dem Winkel $\sigma = \frac{\pi}{2}$ schneiden.

Satz 1.1: Der Schnitt $\varepsilon \cap \mathcal{S}^2$ einer Ebene $\varepsilon \subset \mathcal{E}^3$ mit der Sphäre $\mathcal{S}^2$ ist entweder leer, einpunktig oder ein Kreis, je nachdem, ob der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene größer als 1, gleich 1 oder kleiner als 1 ist.

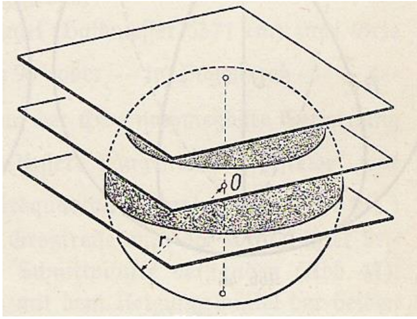

Abb. 2: Schnitte durch die Kugel

Beweis: Da die geometrischen Eigenschaften einer Figur von Punkten im $\mathcal{E}^3$ auch gegenüber Drehungen des Koordinatensystems invariant sind (Rotationssymmetrie), kann o. B. d. A. für die Ebenengleichung die folgende Parametergleichung gewählt werden:

$\varepsilon : \overrightarrow{OX} = a(0,0,1)^T + u(1,0,0)^T + v(0,1,0)^T$ mit dem Abstand a $\geq$ 0 vom Ursprung O und

u, v $\in \mathbb{R}$. $\overrightarrow{OX}$ in die Kugelgleichung $\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} \rangle = 1$ eingesetzt, liefert die Schnittbedingung $u^2 + v^2 = 1 - a^2$. Ist a >1, so ist die rechte Seite der Gleichung negativ und somit die Schnittmenge leer. Ist $a = 1$, so müssen u und v Null sein, und die Schnittmenge besteht lediglich aus dem Punkt S(a, 0, 0). Die Ebene ε ist dann eine Tangentialebene der Sphäre.

Ist $0 \leq$ a<1, so ist $r^2 := 1 - a^2 > 0$. Ersetzt man in der Gleichung $u^2 + v^2 = r^2$ die Parameter u bzw. v durch $u = r\sin(\alpha)$ bzw. $v = \cos(\alpha)$ ($0 \leq \alpha < 2\pi$), so erhält man als Schnittmenge $\varepsilon \cap \mathcal{S}^2$= $\{\overrightarrow{OS} \mid \overrightarrow{OS} = a \cdot (0,0,1)^T + r\cos(\alpha) \cdot (1,0,0)^T + r\sin(\alpha) \cdot (0,1,0)^T\}$ bzw. die Gleichung $\langle \overrightarrow{OS} - (0,0,a)^T, \overrightarrow{OS} - (0,0,a)^T \rangle = r^2$. Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt M(0, 0, a) und dem Radius $r = \sqrt{1 - a^2}$. Ist 0<a<1, so erhält man einen so genannten Kleinkreis, ist a = 0, so ist der Mittelpunkt M des Kreises gerade der Ursprung O. q. e. d.