Potenzen mit rationalen bzw. irrationalen Exponenten

Von PETER FRANZKE in Berlin

Ist von zwei Zahlen a und b bekannt, ob sie rational oder irrational sind, so kann man in den meisten Fällen leicht feststellen, ob auch die Summe $a+b$ und das Produkt $a \cdot b$ rational oder irrational sind:

Sind beide Zahlen rational, so sind $a+b$ und $a \cdot b$ auch rational, denn "$+$" und "$\cdot$" sind innere Verknüpfungen auf der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Sind beide Zahlen irrational, so kann $a+b$ und $a \cdot b$ entweder rational oder irrational sein:

$$1{,}1221222122221222221\ldots + 1{,}1001000100001000001\ldots = 2{,}\overline{2} = 20/9;$$
$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18};$$
$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4;$$
$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$$

Ist jedoch eine der beiden Zahlen rational und die andere irrational, so sind sowohl $a+b$ als auch $a \cdot b$ $(b \neq 0)$ irrational, denn wäre z. B. $irrational + \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, so gälte $irrational = \frac{rq-ps}{sq} \in \mathbb{Q}$, was unmöglich ist.

Analog erhielte man aus $irrational \cdot \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ mit $p \neq 0$ sofort den Widerspruch $irrational = \frac{rq}{sp} \in \mathbb{Q}$.

Was aber weiß man über die Potenz a^b, wenn von zwei Zahlen a und b bekannt ist, ob sie rational oder irrational sind?

Sind beide Zahlen rational, dann kann die Potenz a^b sowohl irrationale als auch rationale Werte annehmen. ($2^{1/2}=\sqrt{2}; 4^{1/2}=2$)

Eine irrationale Zahl hoch eine rationale Zahl kann irrational oder rational sein.

($\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\cdot\sqrt{2}; \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$)

Satz 1:

Eine rationale Zahl hoch eine irrationale Zahl kann a) irrational oder b) rational sein.

Beweis:

a) Ist die Zahl $2^{\sqrt{2}}$ irrational, so liegt ein Beispiel für a) vor.

   Ist die Zahl $2^{\sqrt{2}}$ rational, so ist die Zahl $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2}$ irrational.

b) $1^{\sqrt{2}} = 1$.

Satz 2:

Eine irrationale Zahl hoch eine irrationale Zahl kann a) rational oder b) irrational sein.

Beweis:

a) Ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational, so liegt ein Beispiel für die Aussage a) vor.

   Ist aber $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational, so ist $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ rational.

b) Ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational, so liegt ein Beispiel für b) vor.

   Ist aber $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational, so ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}$ irrational. □

Bei den Beweisen der Sätze wird lediglich die Irrationalität von $\sqrt{2}$ ausgenutzt, ohne zu wissen, ob die Zahlen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $2^{\sqrt{2}}$ rational oder irrational sind. Nun ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ wegen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$ die Quadratwurzel aus $2^{\sqrt{2}}$, der sog. Gelfond-Schneider-Konstanten, von der bekannt ist, dass sie transzendent ist:

Satz von Gelfond-Schneider (1934; 1935):

Es seien a und b algebraische Zahlen mit $a \neq 0;1$ und b nicht rational ($b \notin \mathbb{Q}$).

Dann ist die Potenz a^b eine transzendente Zahl.

Die Transzendenz und somit die Irrationalität der Zahlen $2^{\sqrt{2}}$ und $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ folgt unmittelbar aus diesem Satz. Doch niemand weiß bis heute, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ rational oder irrational ist.

Der Satz von Gelfond-Schneider gilt auch für komplexe Zahlen $a \neq 0;1$ und b nicht rational. Dabei ist eine komplexe Zahl genau dann rational, wenn der Imaginärteil 0 und der Realteil rational ist.

Mit Hilfe des Satzes von Gelfond-Schneider erhält man umgehend einige interessante transzendente Zahlen:

- -1 ist algebraisch; $-i$ ist algebraisch und irrational
  $\Rightarrow (-1)^{-i} = (e^{i\pi})^{-i} = e^{\pi} = 23{,}14069263\ldots$ ist transzendent
- i ist algebraisch und irrational
  $\Rightarrow i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2} = 0{,}207879576\ldots$ ist transzendent;
- $\dfrac{\log 3}{\log 2} = 1{,}584962501\ldots$ ist transzendent.

  Beweis: Angenommen $\dfrac{\log 3}{\log 2}$ ist algebraisch. Dann ist auch

  $\dfrac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3$ algebraisch.

  Nun ist $\log_2 3$ irrational. Denn wäre $\log_2 3$ rational, also $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$,

  so wäre $3 = 2^{\frac{p}{q}}$, also $3^q = 2^p$ im Widerspruch zum Satz der eindeutigen Primfaktorzerlegung (3^q ist ungerade; 2^p ist gerade!).
  Daraus folgt nach dem Satz von Gelfond-Schneider, dass $2^{\log_2 3} = 3$ transzendent ist, was offensichtlich falsch ist, d. h. $\dfrac{\log 3}{\log 2}$ muss transzendent sein.