Das Delische Problem

von
Peter Franzke in Berlin

Das Delische Problem (auch duplicatio cubi oder Würfelvolumenverdopplung genannt) gehört neben der Dreiteilung des Winkels und der Quadratur des Kreises zu den klassischen Problemen der antiken Mathematik.

Nach einer Sage befragten die Bewohner der kleinen griechischen Insel Delos, die im Jahre 430 v. Chr. von einer Pestepidemie heimgesucht wurde, das Orakel von Delphi um Rat. Das Orakel empfahl als Mittel zur Erlösung von der Seuche, den würfelförmigen Altar im Tempel des Apollon dem Rauminhalte nach zu verdoppeln, unter Beibehaltung der würfelförmigen Gestalt.

Für die antiken griechischen Mathematiker hieß das, die Kantentenlänge b eines Würfels so zu bestimmen, dass dessen Rauminhalt b^3 das Doppelte des Volumens des gegebenen Würfels der Kantenlänge a ausmacht, also $b^3 = 2a^3$ erfüllt ist. Bezieht man sich auf den Einheitswürfel, so läuft dies nach dem mathematischen Verständnis der Griechen darauf hinaus, eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zu *konstruieren*.

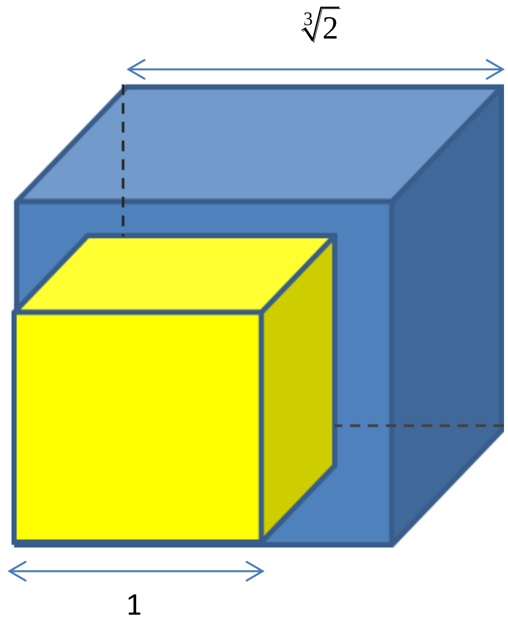

Abb. 1: Die Vervielfachung des Würfels

Diese Einschränken, die sich die griechischen Mathematiker zur Lösung ihrer Probleme auferlegten, lauten präzise [vgl. auch J.-P. Delahaye, Le fascinant nombre π, Pour La Science, 1997]:

- Als Hilfsmittel dürfen einzig und allein ein unmarkierter Zirkel und ein unmarkiertes Lineal verwendet werden.
- Es werden nur *endlich viele* Konstruktionszwischenschritte zugelassen.

Wir wissen heute, dass die oben genannten Probleme unter diesen Voraussetzungen unlösbar sind. Mit Methoden der Galois-Theorie kann einfach bewiesen werden, dass $\sqrt[3]{2}$ nicht in Form geschachtelter Quadratwurzeln mit rationalen Radikanden dargestellt werden kann. Da der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ den Grad drei über den rationalen Zahlen besitzt, kann er gemäß der

Gradformel nicht in einem solchen Körper mit einer Zweierpotenz als Grad über dem Körper $\mathbb{Q}$ liegen.

Verzichtet man auf eine oder gar auf beide der oben genannten Einschränkungen, dann sind zahlreiche Lösungen möglich.

Diese Aufgabe, d. h. die Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$, hat viele Bearbeiter gefunden. Eutokios (um 500 n. Chr.) hat in seinem Kommentar zu Archimedes' „Kugel und Zylinder“ ausführlich darüber berichtet [Archimedes Op. Bd. 3, S. 54-107. Die Geschichte des Problems beschreibt er dort S. 88 f.].

Hippokrates von Chios (um 440 v. Chr. - nicht zu verwechseln mit dem Arzt Hippokrates von Kos, dessen Eid auch heute noch von den Medizinstudenten beim Abschluss des Studiums geleistet wird, an den sich später einige wenige, wenn sie erst einmal arriviert sind, nicht gern erinnern mögen) hat dazu einen wichtigen Schritt getan: Es gilt

$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3.$$

Setzt man $x^2 = y$ und $x^3 = 2$, so wird daraus

$$1 : x = x : y = y : 2.$$

Die Aufgabe lautet also, zwischen 1 und 2 zwei mittlere Proportionale einzuschalten. In dieser Form ist das Problem in der Antike stets behandelt worden. (vgl. Bemerkung S. 6)

Bei der hier vorgestellten Lösungsmethode wird ein Lineal mit abgetragener Längeneinheit verwendet. Das Verfahren besteht in einer Aufeinanderfolge von unendlich vielen „Anpassungsschritten“: Das Lineal wird an den Punkt A gelegt und solange entlang dieses Punktes verschoben und um diesen Punkt gedreht, bis bei der Würfelverdopplung die Maßeinteilungen D_1 bzw. D_2 auf der Geraden g_1 bzw. g_2 liegen oder bei der Dreiteilung des Winkels D_2 den Kreis trifft.

Diese Art der Problemlösung würde Platon selbstverständlich kritisieren und ablehnen, da sie sich mechanischer und nicht geometrischer Methoden bedient, wobei er unter „geometrisch“ die ausschließliche Verwendung von Zirkel und unmarkiertem Lineal meinte.

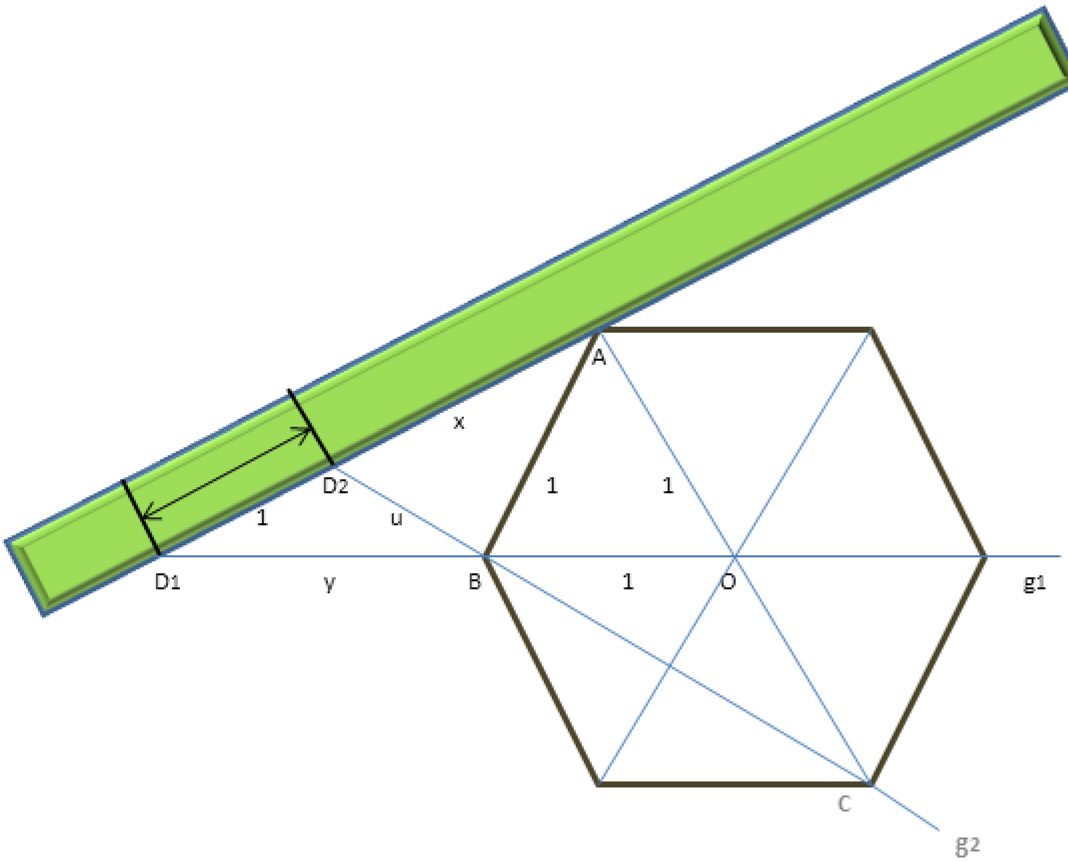

Abb. 2: Das delische Problem

Behauptung: Man „konstruiert“ auf diese Weise zwischen der zweiten Markierung D_2 und dem Punkt A eine Strecke der Länge $x=\sqrt[3]{2}$.

Wendet man nämlich nacheinander auf die Dreiecke $\triangle D_1OA$, $\triangle D_2BA$ und $\triangle D_2BD_1$ den Cosinussatz an, erhält man der Reihe nach die folgenden Gleichungen:

(0.1) $(1+x)^2 = 1+y^2-2y\cos(120°) = 1+y^2+y$

(0.2) $x^2 = 1+u^2$

(0.2) $1 = y^2+u^2-2yu\cos(30°) = y^2+u^2-\sqrt{3}yu$.

Umstellen der Gleichung (0.3) und Quadrieren liefern

(0.3) $3u^2y^2 = (y^2+u^2-1)^2$.

Mit Hilfe der Gleichung (0.2) erhält man

(0.4) $3y^2(x^2-1) = (y^2+x^2-2)^2$, so dass

(0.5) $0 = y^4+x^4-x^2y^2-y^2-4x^2+4$ gilt.

Die Gleichung (0.1) wird nach x aufgelöst und in (0.6) eingesetzt. Man erhält

(0.6) $0 = y^4 + \left(-1+\sqrt{y^2+y+1}\right)^4 - (y^2+4)\left(-1+\sqrt{y^2+y+1}\right)^2 - y^2 + 4$.

Löst man die Klammern auf und stellt um, ergibt sich

(0.7) $2y\left(y+2\right)\sqrt{y^2+y+1} = y^4+y^3+2y^2+4y+4$.

Quadriert man diese Gleichung, löst die Klammern auf und ordnet nach Potenzen, so erhält man ein Polynom in y vom Grad 8.

(0.8) $P(y) := y^8+2y^7+y^6-8y^5-16y^4-8y^3+16y^2+32y+16=0$.

Man erkennt leicht, dass $y_1=-1$ eine Nullstelle des Polynoms ist. Mittels Polynomdivision ergibt sich

(0.9) $P(y)=(y^7+y^6-8y^4-8y^3+16y+16)\cdot(y+1)=0$.

Es zeigt sich, dass $y_1=-1$ sogar eine doppelte Nullstelle ist, so dass man nach Polynomdivision schließlich

(0.10) $P(y)=(y+1)^2(y^3-4)=0$ erhält.

Da y als Streckenlänge positiv ist, lautet unsere Lösung $y_2=\sqrt[3]{4}$.

Setzt man y_2 in die Gleichung (1.1) ein, so ergibt sich

$$(x+1)^2 = 1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16} = 1+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+2\sqrt[3]{2} = \left(\sqrt[3]{2}+1\right)^2 .$$

Da auch x>0 ist, hat man schlussendlich, wie behauptet, $x=\sqrt[3]{2}$ „konstruiert“.

Die Dreiteilung eines Winkels

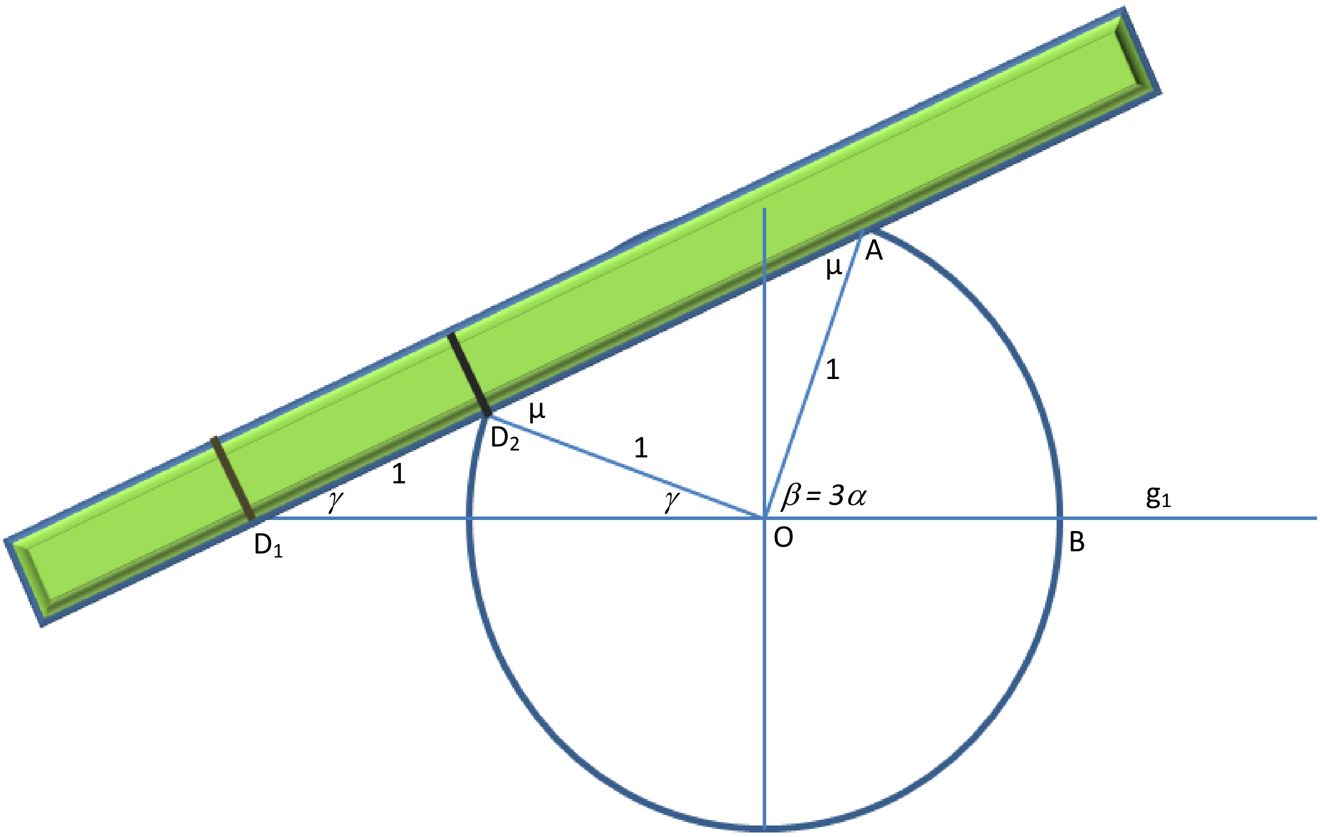

Abb. 3: dreigeteilter Winkel

Bezeichnungen:

$$\gamma = \sphericalangle D_2OD_1 = \sphericalangle OD_1D_2\,;\ \beta = 3\alpha = \sphericalangle BOA\,;\ \mu = \sphericalangle OD_2A = \sphericalangle D_2AO$$

Der im Einheitskreis eigetragene Winkel $\sphericalangle BOA$ soll gedrittelt werden.

Einerseits gilt $2\gamma = \mu$, andrerseits $2\mu = 3\alpha + \gamma$. Daraus folgt $\gamma = \alpha$ und $\mu = 2\alpha$.

Bemerkung: Lösungsweg nach Menaichmos (Mitte des 4. Jahrhunderts v. Chr.):

Aus $1 : x = x : y = y : 2$ folgen die Gleichungen

$$x^2 = y, \quad y^2 = 2x, \quad xy = 2.$$

Jede dieser Gleichungen ist von den beiden anderen abhängig, d. h. wenn zwei dieser Gleichungen erfüllt sind, ist es auch die dritte. Das sind aber die Gleichungen zweier Parabeln und einer Hyperbel. Der Wert $\sqrt[3]{2}$ kann also dem Schnittpunkt beider Kurven entnommen werden.

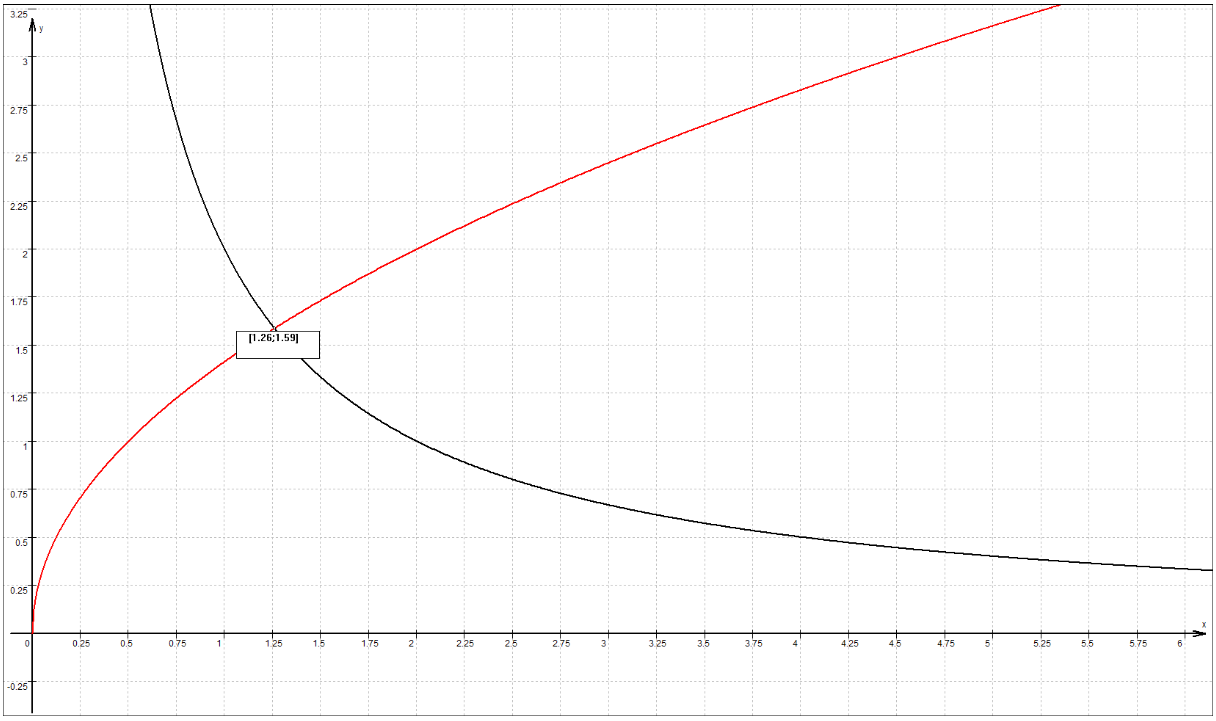

Abb. 4: Schnitt der Parabel $y^2 = 2x$ mit der Hyperbel $y = \frac{2}{x}$

Geht man von den beiden letzten Gliedern der Proportion aus, so sind „alle“ zu dem gegebenen Rechteck $a = 1,\ b = 2$ flächengleiche Rechtecke $x \cdot y = 2$ mittels der „Gnomonfigur“ (s. u: ABCD ist das gegebene Rechteck, AB‘ oder AD‘ die gegebene Seite, an die angelegt wird) zu konstruieren; „alle“ y-Koordinaten der Parabel können als mittlere Proportionale zwischen 2 und x als Höhe des rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten 2 und x konstruiert werden.

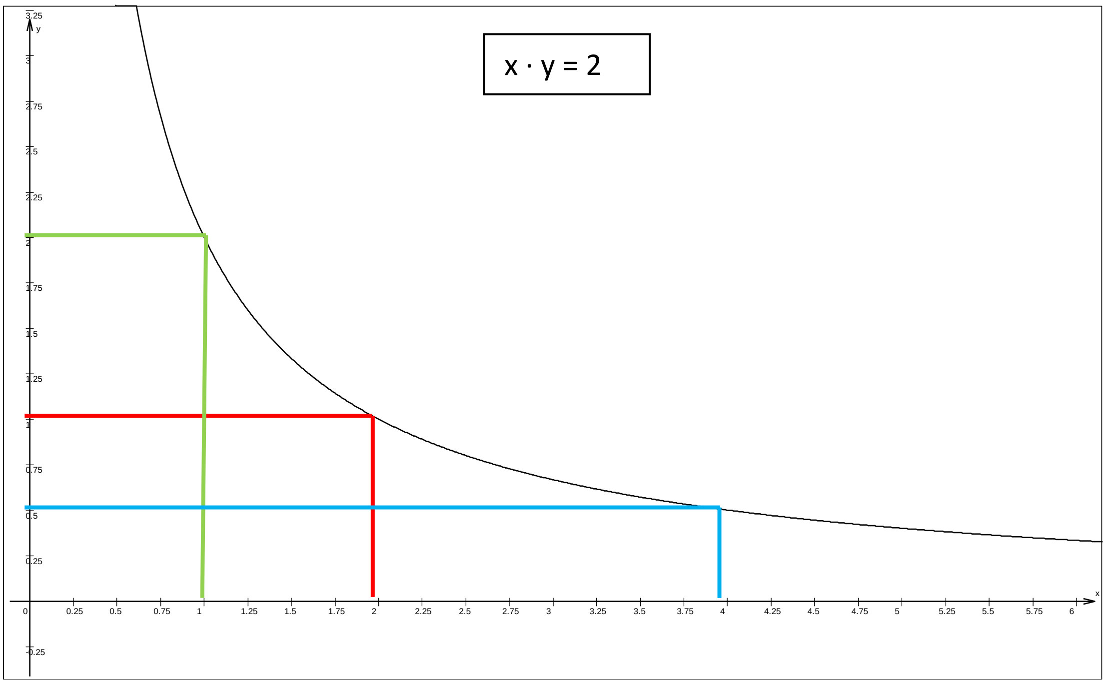

Abb. 5: x · y = 2

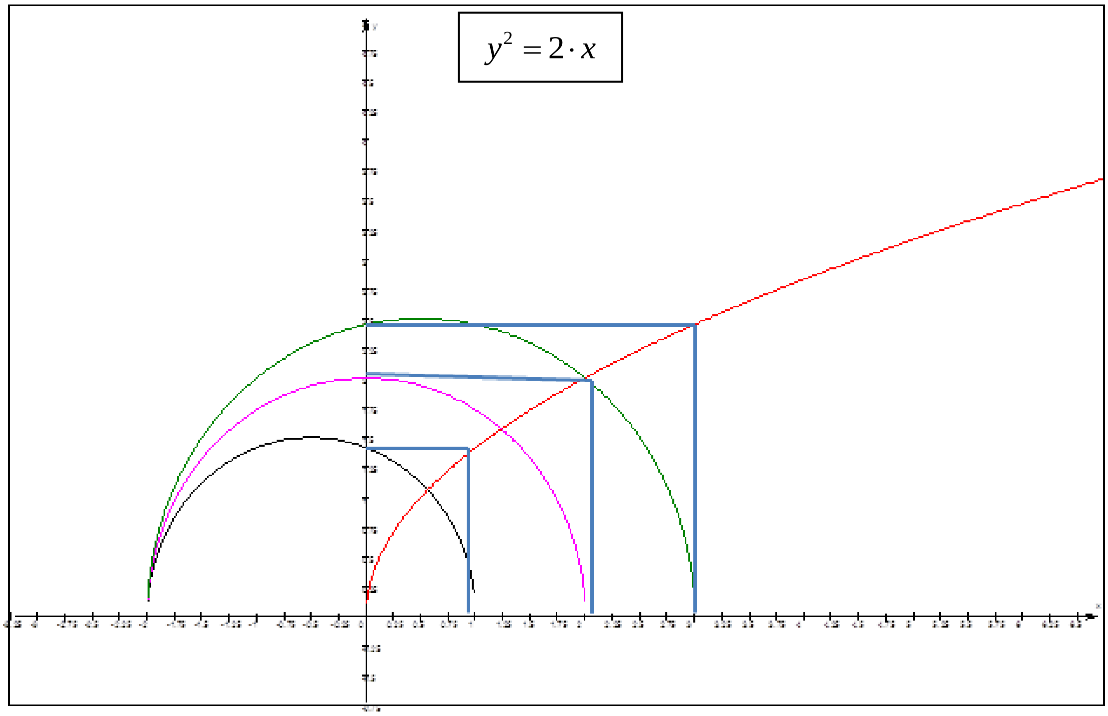

Abb. 6: $y^2 = 2 \cdot x$

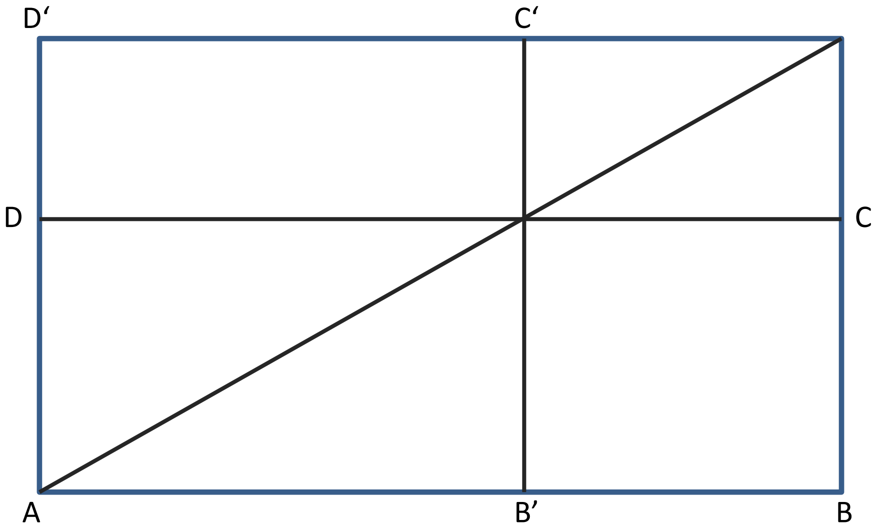

Abb. 7: "Gnomonfigur"